

Задача 1

В-1 Аля и Валя испекли пирог прямоугольной формы со сторонами 20 и 15 см и решили сыграть в такую игру. Каждая из них по очереди делает не более двух параллельных разрезов и съедает один из имеющихся кусков. При этом куски перекладывать нельзя. За один ход обязательно нужно съесть кусок, но не более $1/10$ пирога. Запрещено резать пирог так, чтобы получались куски меньше $1/100$ пирога. Побеждает тот, кто доел пирог. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Аля? Какая стратегия выигрышная?

Ответ: Аля.

Решение. Оптимальная стратегия такова. Аля первым ходом вырезает и съедает из пирога полосу так, чтобы остались два симметричных прямоугольника. Далее, какой бы кусок ни съела Валя — это будет кусок от одной из частей. Аля съедает центрально симметричный кусок от другой части, и тем самым обеспечивает себе победу.

Задача 2

В-1 Назовем натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$); 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите наименьшее суперсчастливое число.

Ответ: 549

Решение. Суперсчастливое число как минимум трёхзначное. Двухзначное счастливое число, очевидно, имеет вид \overline{aa} , и тогда либо $\overline{aa} + 1$ двухзначное несчастливое, либо несчастливое 100.

Рассмотрим трехзначные числа. Сумма цифр счастливого числа должна быть четной (иначе разбиение на две группы с одинаковой суммой цифр невозможно), поэтому суперсчастливое число должно заканчиваться цифрой 9, так как в ином случае суммы цифр двух последовательных чисел имеют разную четность. Значит, суперсчастливое трехзначное число имеет вид $\overline{ab9}$, а следующее за ним число состоит из цифр $a, b + 1, 0$. Отметим, что при этом случай $b = 9$ невозможен, так как тогда число не будет счастливым.

Поэтому должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры a, b и 9, так и цифры $a, b + 1$ и 0. Для первой комбинации цифр или $a = b + 9$ (откуда $a = 9, b = 0$), или $b = a + 9$ (что невозможно), или $a + b = 9$. Для второй комбинации $a = b + 1$. Одновременно оба числа счастливые только при $b = 4, a = 5$. Таким образом, имеется одно трехзначное суперсчастливое число 549 (за ним следует счастливое число 550).

Задача 3

В-1 Найдите последнюю цифру числа

$$8^{2025^{2025}}.$$

Примечание. Порядок возведения в степень следующий: например, $4^{3^2} = 4^9 = 262144$

Ответ: 8

Решение. $8 = 2^3$, таким образом,

$$8^{2025^{2025}} = 2^{3 \cdot 2025^{2025}}.$$

Заметим, что степени двойки оканчиваются на цифры 2, 4, 8, 6 — и дальше продолжают периодически. Значит, если выразить показатель степени в виде $3 \cdot 2025^{2025} = 4 \cdot k + j$, где $k \in \mathbb{N}, j = 0, 1, 2, 3$ — то по этому j можно определить последнюю цифру числа.

Числа, оканчивающиеся на 25, в любой степени оканчиваются на 25. Значит, $3 \cdot 2025^{2025}$ оканчивается на 75. Если оно оканчивается на 75, то оно представляется в виде $m \cdot 100 + 75$. Сто делится на 4, а $75 = 72 + 3 = 4 \cdot 18 + 3$, то есть $j = 3$, поэтому

$$8^{2025^{2025}}$$

оканчивается на 8.

Задача 4

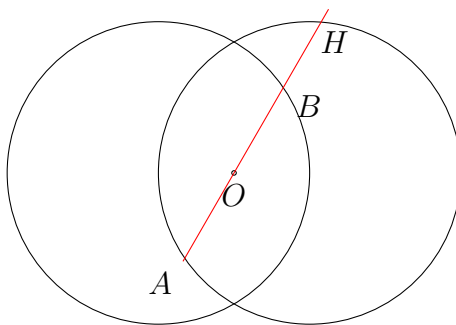
В-1 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса 2 м. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками стоит коза.

Там, куда попадает вода из одной поливалки, равномерно растёт трава, а там, куда попадает вода из двух поливалок сразу, трава растёт равномерно и вдвое гуще. Там, куда вода из поливалок не попадает, трава не растёт вообще.

Коза может идти строго по прямой и есть траву на своём пути. В каком направлении козе нужно пойти, чтобы съесть как можно больше травы, ни разу не поворачивая, и какой длины будет её путь?

Ответ: 3 м

Решение.



Двигаясь по некоторой прямой, коза съест столько же травы, сколько съела бы, если бы плотность роста травы была одинаковой всюду, куда попадает вода хотя бы из одной поливалки, и при этом она прошла бы всю хорду одной из окружностей по этой прямой. То есть количество съеденной на луче OH травы равно длине AH . Самая длинная хорда — диаметр, а коза пройдёт $3/4$ его длины, то есть 3 м.

Задача 5

В-1 У Паши есть игральный кубик со стандартной расстановкой точек (при ней сумма очков на противоположных гранях равна 7), только вместо точек на кубике сидят жуки. Кубик подбросили, жуки засуетились и каждый переползает на одну из четырёх соседних граней.

Какое наибольшее число жуков может оказаться на одной грани?

Ответ: 14

Решение. Так как все жуки покидают свою родную грань, число очков складывается из тех жуков, которые напоззли на неё с соседних. В наиболее выгодном варианте все жуки с соседних граней ползут на нашу, а в сумме (какую бы грань мы бы ни выбирали) на соседних гранях есть 14 жуков.

Задача 6

В-1 В классе, состоящем из 20 учащимся, учитель раздал каждому свой сборник, содержащий ровно 100 задач. Каждый учащийся решил из этого сборника не менее n задач, а Петя — больше, чем Вася. Для какого наименьшего значения n при этом условии обязательно найдется задача, которую решило не менее половины класса?

Ответ: 45

Решение. Если $n \geq 45$, то в общей сложности учащиеся решили задач не менее $19 \cdot 45 + 46 = 901$. Но если при этом каждую задачу решило не более 9 учащихся, то всего задач они решили не более $9 \cdot 100 = 900 < 901$ — противоречие. Если же $n \leq 44$, причём Петя решил 45 задач, а все остальные по 44 задачи — пусть даже все по 45, то может случиться, что каждую задачу решили ровно по 9 учащихся. Действительно, расположив все 100 задач по окружности, каждому учащемуся отведем ровно по 45 задач подряд со сдвигом на 5 задач при переходе к следующему учащемуся — тогда каждой задаче будет соответствовать ровно 9 учащихся.

Задача 7

В-1 Сколько есть способов сложить пальцы рук, если между двух пальцев одной руки помещается не больше двух пальцев другой?

Примечание. Например, если обозначать П — пальцы правой руки, и л — пальцы левой, то:

- Расстановки ПППППллллл, лПлПлПлПлП, ПППлППллллл разрешены;
- Расстановки ПлллллПППП, ллППлПППлл — запрещены;
- Симметричные расстановки (например, ПППППллллл и лллллППППП) считаются различными.

Ответ: 108

Решение. Сцепки пальцев будем описывать буквами П и л. Получаются слова из 10 букв, 5 букв «П», 5 букв «л», и всего есть $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$ способов выбрать 5 букв на 10 местах. Правда, не каждое слово из 252-х подойдёт под условие.

	3П	4П	5П	П — нет нарушений	
3л	14	4	0	42	в сумме 252
4л	4	2	0	14	
5л	0	0	0	4	
л — нет нарушений	42	14	4	тут будет ответ	

Пойдём от обратного — выкинем те слова, которые не подходят под условия. Какие могут быть «нарушения»? Три, четыре, пять левых (или правых) пальцев подряд между пальцев другой. При этом у нас не так много пальцев, чтобы делать больше одного нарушения одной рукой. Можно составить такую таблицу:

В ячейки будем писать количество слов, имеющих данное сочетание нарушений. В сумме все ячейки таблицы дают 252. Также таблица симметрична, что поможет её заполнить.

Нарушение вида 5 пальцев не позволяет сделать нарушение второй рукой. Какие могут быть слова типа «5П/по л нет нарушений»? В таком слове содержится сочетание букв лПППППл, и ещё остаётся три буквы л. Есть 4 способа приписать их к лПППППл, откуда получаем 4 варианта.

Аналогично рассматриваем другие ячейки. Слова «4л/4П» — либо лППППллллП, либо ПллллППППл, и других таких нет. 2 комбинации.

В словах «4л/3П» ППП и ллл должны соседствовать (иначе не хватает пальцев.) В таком слове, значит, есть либо лПППллллП, либо ПллллПППл, и последнюю букву П можно приписать либо слева, либо справа. 4 комбинации, то же и у «3л/4П»

Слова «3л/3П» бывают либо с соседством ЛЛЛ и ППП, либо разделённые. С соседством: лПППлллП и ПлллПППл, ещё остались буквы П, л, которые можно приписать в начале или конце 6 способами (Плх, лПх, хлП, хПл, Плх, лхП). Всего 12. Разделённые выглядят так: лПППл-ПлллП или ПлллПлПППл, ещё 2 способа. В общем — 14.

Слова «4л/П — нет нарушений» выглядят так: в них есть ПлллП. Оставшиеся л, П, П, П могут быть выписаны в любом порядке (4 варианта), и ПлллП может быть вставлено между любых двух букв, или в начале, или в конце четырёхбуквенного слова. То есть всего это $4 \cdot 5 = 20$ вариантов, но среди них есть 6, порождающих нарушение по П. Итого 14.

Слова «Зл/П — нет нарушений» выглядят так: в них есть ПлллП. Оставшиеся л,л,П,П,П могут быть выписаны в любом порядке (10 вариантов), и ПллллП может быть вставлено между любых двух букв, или в начале, или в конце. Всего это $6 \cdot 10 = 60$ вариантов (среди 10 слов много симметричных, что облегчает перебор), среди которых 18 породят новые нарушения. Итого $60 - 18 = 42$

Ответ равен $252 - 14 - 4 - 4 - 2 - 42 - 42 - 14 - 14 - 4 - 4 = 108$.
